CONCOURS BLANC ÉPREUVE I CORRECTION

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

Barème et exigences

Exercice 1 : 31 points.

1. 1 point, c'est un polynôme.
2. **a.** 2 points, 1 pour chaque.
   b. 1 point, il suffit de savoir ce qu'est le gradient.
   c. 3 points, dont 1 pour citer la bijectivité de la fonction $x \mapsto x^3$ ou $x \mapsto -x^3$.
3. **a.** 4 points, 1 pour chaque, on peut citer Schwartz ou faire deux calculs pour les dérivées croisées.
   b. 10 points, 1 pour chaque matrice. Puisque deux de ces trois matrices sont les mêmes, il suffit de trouver les valeurs propres de la hessienne en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ par exemple. 2 points pour la recherche des valeurs propres et 1 point pour la conclusion (pour chacune des deux matrices). 1 pour le calcul du minimum.
   c. 3 points, 1 pour chaque signe, 1 pour la conclusion.
4. **a.** 2 points, calcul pénible mais facile.
   b. 1 point.
5. **a.** 1 point.
   b. 3 points, 1 pour trouver le bon argument pour chaque nappe.

Exercice 2 : total 34 points.

1. 2 points, 1 pour la positivité, continuité (attention la densité n'est pas continue en 1), 1 pour le calcul intégral.
2. 5 points, 2 pour l'espérance, 3 pour la variance (dont 1 pour citer Konig-Huygens).
3. 2 points, 1 pour chaque cas ($x \geqslant 1$ ou $x < 1$), le calcul de l'intégrale a déjà du être fait à la question **1**.
4. **a.** 2 points, attention, il s'agit bien de résoudre l'équation, le théorème de la bijection ne suffit pas.
   b. 2 points, 1 pour la majoration de chaque terme du produit. L'étude de fonction est envisageable aussi mais c'est beaucoup plus long.
   c. 1 point, tout est dans la question précédente.
5. **a.** 2 points, 1 pour la définition de la proba conditionnelle, 1 pour simplifier le calcul.
   b. 2 points, 1 pour la limite (très simple), 1 pour l'interprétation.
6. **a.** 2 points, on demande à ce que la croissance de la fonction exponentielle soit explicitée.
   b. 2 points, 1 pour la fin du calcul de la fonction de répartition, 1 pour la reconnaître.
7. 2 points, il suffit de simuler une exponentielle et de la transférer.
8. **a.** 1 point, la seule contrainte et de ne pas utiliser θ dans l'expression de T_n.
   b. 2 points, on calcule l'espérance et on cite la linéarité.
   c. 3 points, on calcule la variance et on utilise l'indépendance. Pour la convergence, citer le cours suffit, mais on peut aussi détailler l'argument avec Bienaymé-Tchebychev (auquel cas, 1 point pour citer B-T mais qui ne sera pas redonné à la question suivante).

---

http://louismerlin.fr.

9. **a.** 1 point, question de cours.
b. 2 points, c'est la petite manipulation habituelle.
c. 2 points.

Exercice 3 : total : 58 points.

1. 1 point, elle est symétrique (sinon on ne poserait pas la question maintenant).

2. **a.** 2 points, très classique.
b. 1 point, c'est du cours ou presque.

3. **a.** 2 points, 1 si la définition de la matrice dans une base me semble claire, 1 pour l'expression exacte de la matrice.
b. 2 points, 1 pour dire que les matrices sont semblables, 1 pour dire que des matrices semblables ont même spectre.
c. 1 point, une explication vague suffit.

4. **a.** 2 points, attention à ne pas dire *le* polynôme annulateur (il n'est pas unique), auquel cas -1.
b. 5 points, 1 pour les racines du polynôme annulateur, 2 pour la recherche des deux sous-espaces propres suggérés.
c. 2 points, 1 pour donner P et D, 1 pour citer la formule de changement de base. Attention la formule de changement de base ne prouve pas l'existence de P et D.

5. **a.** 1 point.
b. 2 points, 1 pour la forme diagonale de $M(a,a,a)$, 1 pour le spectre qui s'en déduit. Rappeler que des matrices semblables ont même spectre ne peut pas faire de mal, même si ça n'est pas indisepensable ici.
c. 2 points, 1 pour comprendre que chaque terme de l'équivalence signifie en fait que $a \notin \{0,-3\}$.

6. **a.** 2 points, dont 1 pour le théorème du rang. On peut aussi faire un pivot ou calculer l'espace propre $E_0(C)$
b. (i) 3 points, 1 pour la rigueur dans la manipulation des équivalents, 2 pour la bonne résolution du système.
(ii) 2 points, on doit absolument se souvenir que les vecteurs propres doivent être non nuls.
c. 2 points, 1 pour montrer que le Δ de l'équation en c est positif, 1 pour se souvenir que 0 est aussi valeur propre.

7. **a.** 1 point, c'est comme à la question **5.a**.
b. 2 points, c'est aussi le déroulé de la question **5**.
c. Une question très difficile, hors barème puisque personne ne l'a touchée.

8. 1 point, tout est donné dans la question.

9. **a.** 4 points, 1 pour la dérivée, 1 pour les varations, 1 pour les limites en $\pm\infty$, 1 pour les limites en a, b et c.
b. 3 points, 2 pour le théorème de la bijection et l'apparition des trois solutions, 1 pour "exactement" 3 solutions, c'est-à-dire qu'il n'y en a pas dans l'intervalle $]-\infty, a[$.
c. 2 points, 1 pour $M(a,b,c)X_\lambda$, 1 pour la simplification qui permet de conclure.
d. 1 point, question de conclusion.

10. **a.** 1 point, c'est encore la question **3**.
b. 2 points, question difficle aussi.

11. **a.** 2 points, 1 si on n'utilise pas la propriété $(\star)$.
b. (i) 3 points, on raisonne à partir du théorème de la bijection.
(ii) 5 points, 1 par ligne.

Orthographe, présentation, lisibilité : 6 points.

Commentaires généraux / erreurs fréquentes

Commentaires généraux.

1. Beaucoup de difficultés constatés dans les thématiques les plus récentes que nous avons traité. Même s'il reste des défauts en algèbre linéaire, plusieurs méthodes me semblent s'être solidifiées.
2. Beaucoup de progrès dans la gestion du temps, les trois exercices me semblent avoir reçu la même attention.
3. Il y a encore des choses à faire pour progresser chez les étudiants les plus faibles. Pourquoi ne pas utiliser la période de révisions pour (enfin) savoir dériver et primitiver, et savoir résoudre des systèmes ? Ou apprendre son cours.

Exercice 1.

1. Une source d'erreur fréquente consiste à confondre les paramètres (qui sont des couples) et les valeurs que prend f. On lit ainsi souvent "le minimum est atteint en -8", alors qu'il faudrait dire que le minimum *vaut* -8 et qu'il est atteint en $\pm(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Le minimum est en effet une valeur prise par f alors que les points en lesquels f atteint son minimum est un paramètre, donc un couple.
2. Beaucoup de problèmes techniques dans la résolution du système (non linéaire !) $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On rappelle que ces systèmes ne se résovent en général pas par équivalence. Ici les points critiques étaient donnés, mais on ne peut pas se contenter de vérifier que les trois points annoncés sont solutions (sinon on montre que ces points là sont points critiques, mais on ne dit pas qu'il n'y a que ceux-là).
3. Le théorème du cours sur le rapport entre les valeurs propres de la hessienne et la nature des points critique est mal compris / mal appris. On rappelle que si 0 est valeur propre de la hessienne, *on ne peut pas conclure*, et que ne pas conclure n'est pas la même chose que de conclure que le point critique n'est pas un extremum. Dire qu'un point critique n'est pas un extremum est une conclusion.
4. Beaucoup de points étaient donnés dans le barème pour faire des calculs de dérivées. On ne vous pardonnera pas de ne pas savoir les faire.

Exercice 2.

1. Même si f est définie sur $[1, +\infty[$ comme une fonction qui serait continue sur $\mathbb{R}$ si elle était définie sur $\mathbb{R}$, on ne peut pas dire pour autant que f est continue sur $[1, +\infty[$. On rappelle que
   - Le point $x = 1$ est un point de raccordement, la continuité en 1 est donc à tester par un calcul de limite à droite et de limite à gauche.
   - On peut dire qu'une fonction est continue sur un intervalle avec des arguments du type "somme, composée, produit,..." de fonctions continues mais *à condition que cet intervalle soit ouvert.*
   - Dans le cas de l'exercice, il n'est pas utile de savoir si f est continue en 1 ou non (d'ailleurs elle ne l'est pas) mais il est pénalisé d'affirmer qu'elle est continue alors qu'elle ne l'est pas.
2. Il reste des problèmes de cours et des confusions entre les propriétés à vérifier pour une densité et celles à vérifier pour une fonction de répartition. En particulier, il n'est absolument pas nécessaire de savoir que f est $\mathcal{C}^1$.
3. Il y a énormément de problèmes de calculs d'intégrales.
4. Les connaissances en estimation sont encore trop fraiches.

Exercice 3.

1. Il s'agit d'un excellent exercice de synthèse d'algèbre linéaire qui passe en revue toutes les méthodes du cours. C'est un bon support de révision.
2. La question **2.a** bien que très classique (et déjà posée au DS précédent) n'a pas donné lieu à une réponse satisfaisante.
3. Beaucoup moins de problèmes dans la résolution de systèmes linéaires !

4. La partie C était globalement très difficile.

5. Les deux questions "Montrer que l'équation ... admet une unique solution" et "Montrer que l'équation ... admet une unique solution et la déterminer" bien que similaire en apparence ne sont pas du tout les mêmes. La première suggère d'appliquer le théorème de la bijection (comme c'est le cas à la question **9.d**)

Correction détaillée

Correction 1 **1.** f est $\mathcal{C}^1$ comme polynôme.

2. **a.** On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4\ (x-y) = 4x^3 - 4x + 4y$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4\ (x-y)\ (-1) = 4y^3 + 4x - 4y$$

b. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\nabla(f)(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2} &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 4\ (x^3 - x + y) & = & 0 \\ 4\ (y^3 + x - y) & = & 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 + x - y & = & 0 \end{array}\right.\end{aligned}$$

$$\boxed{\nabla(f)(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 + x - y & = & 0 \end{array}\right.}$$

c. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Par définition (x, y) est un point critique de f si et seulement si $\nabla(f)(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2}$ Le système qu'il faut résoudre n'est pas un système linéaire. Nous n'allons donc pas raisonner par équivalences mais plutôt par analyse-synthèse : on cherche des conditions sur (x, y) pour que ce soit un point critique, puis on vérifiera que ces conditions sont suffisantes. Partons donc de la caractérisation

$$(x,y) \text{ est un point critique de } f \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 + x - y & = & 0 \end{array}\right. .$$

En ajoutant ces deux lignes, on obtient $x^3 + y^3 = 0$, c'est-à-dire, $x^3 = -y^3 = (-y)^3$. Or la fonction $x \mapsto x^3$ est une bijection (elle est continue et strictement croissante) donc de $x^3 = (-y)^3$, on obtient $x = -y$. Dans la première ligne du système, remplaçons alors y par $-x$. On a

$$x^3 - 2x = 0$$

qui est une équation de degré 3 mais facile à résoudre puisqu'elle a une racine évidente 0. En effet :

$$x^3 - 2x = x(x^2 - 2) = x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

et on constate que $x \in \left\{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\right\}$. Les *candidats* pour être des points critiques (ce ne sont que des candidats car on n'a pas raisonné par équivalences) sont donc les points (x, y) suivants

$$(0,0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Enfin, on vérifie facilement que ces trois candidats sont effectivement points critiques en vérifiant que le gradient s'annule en ces trois points.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ possède trois points critiques : } (0,0),\ (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \text{ et } (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).}$$

3. **a.** La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car c'est une fonction polynomiale.
Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Tout d'abord :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4\ (3x^2 - 1)$$

Ensuite :

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4 = \frac{\partial f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

La dernière égalité est obtenue en vertu du théorème de Schwarz puisque la fonction f est $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
Enfin :

$$\frac{\partial f}{\partial y^2}(x,y) = 4\ (3y^2 - 1)$$

b.

$$\nabla^2(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 4\ (3\ (0)^2 - 1) & 4 \\ 4 & 4\ (3\ (0)^2 - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2(f)\big(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\big) = \begin{pmatrix} 4\ (3\ (\sqrt{2})^2 - 1) & 4 \\ 4 & 4\ (3\ (-\sqrt{2})^2 - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2(f)\big(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\big) = \begin{pmatrix} 4\ (3\ (\sqrt{2})^2 - 1) & 4 \\ 4 & 4\ (3\ (-\sqrt{2})^2 - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

c.

$$\begin{aligned} \det\Big(\nabla^2(f)(0,0) - \lambda\ I\Big) &= \det\left(\begin{pmatrix} -4-\lambda & 4 \\ 4 & -4-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= (-4-\lambda)^2 - 4^2 \\ &= (4+\lambda)^2 - 4^2 \\ &= (4+\lambda-4)\ (4+\lambda+4) \ = \ \lambda\ (\lambda+8) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \nabla^2(f)(0,0) \text{ admet pour valeurs propres } 0 \text{ et } -8.}$$

$$\begin{aligned} \det\Big(\nabla^2(f)(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) - \lambda\ I\Big) &= \det\left(\begin{pmatrix} 20-\lambda & 4 \\ 4 & 20-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= (20-\lambda)^2 - 4^2 \\ &= (20-\lambda-4)\ (20-\lambda+4) \ = \ (16-\lambda)\ (24-\lambda) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \nabla^2(f)(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \text{ et } \nabla^2(f)(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{ admettent pour valeurs propres } 16 \text{ et } 24.}$$

es deux matrices admettent deux valeurs propres strictement positives. On en déduit que f admet un minimum local en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
Enfin :

$$\begin{aligned} f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) &= (\sqrt{2})^4 + (-\sqrt{2})^4 - 2\ (\sqrt{2} - (-\sqrt{2}))^2 \\ &= 4 + 4 - 2\ (2\ \sqrt{2})^2 \\ &= 8 - 2 \times 4 \times 2 \\ &= 8 - 16 \ = \ -8 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ce minimum local a pour valeur } f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8 = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}).}$$

d. Tout d'abord :

$$f(x,x) = x^4 + x^4 - 2\ (x-x)^2 = 2\ x^4 \geqslant 0$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} f(x,-x) &= x^4 + (-x)^4 - 2\ (x - (-x))^2 \\ &= 2x^4 - 2\ (2\ x)^2 \\ &= 2x^4 - 8x^2 \\ &= 2x^2\ (x^2 - 4) = 2x^2\ (x-2)\ (x+2) \end{aligned}$$

Comme $x^2 \geqslant 0$, la quantité $f(x,-x)$ est du signe de de $(x-2)\,(x+2)$. Ainsi, $f(x,-x)<0$ si $x \in]-2,2[\setminus\{0\}$, et $f(x,-x) \geqslant 0$ sinon. Enfin, $f(0,0)=0$.
On déduit de ce qui précède que pour tout x au voisinage de 0 (exclu), on a :

$$f(x,-x) < f(0,0) < f(x,x)$$

On en conclut qu'au point $(0,0)$, la fonction f n'admet ni un minimum local, ni un maximum local. Il n'y a pas d'extremum au point $(0,0)$.

4. a. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{ll} & f(x,y) - (x^2-2)^2 - (y^2-2)^2 - 2(x+y)^2 \\ = & f(x,y) - (x^4 - 4x^2 + 4) - (y^4 - 4y^2 + 4) - 2\,(x^2 + 2xy + y^2) \\ = & (x^4 + y^4 - 2(x-y)^2) - x^4 - y^4 + 2x^2 + 2y^2 - 4xy - 8 \\ = & -2x^2 + 4xy - 2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 4xy - 8 \\ = & -8 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) - (x^2-2)^2 - (y^2-2)^2 - 2(x+y)^2 = -8.}$$

b. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & -8 + \Big((x^2-2)^2 + (y^2-2)^2 + 2(x+y)^2\Big) \\ & \geq & -8 \end{array}$$

car on ajoute à -8 une somme de carrés.

c. On rappelle que $f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = -8$. Ainsi :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) \leqslant f(x,y)$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet aux points } (\sqrt{2},-\sqrt{2}) \text{ et } (-\sqrt{2},\sqrt{2}) \text{ un minimum global.}}$$

5. a.

```python
def f(x,y):
    return x**4 + y**4 - 2 * (x - y)**2
```

b.
- D'après l'étude précédente, la fonction f possède un minimum global réalisé en les deux points $((\sqrt{2},-\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2},\sqrt{2}))$.
- On peut écarter la deuxième nappe qui représente une fonction n'admettant un minimum global qu'en un point.
- On peut écarter la troisième nappe qui représente une fonction n'admettant pas de minimum global (elle admet par contre un point selle).
- Seule la première nappe représente une fonction admettant un minimum global réalisé en deux points. C'est donc la représentation de la fonction f considéré.

$$\boxed{\text{Le script précédent renvoie la première nappe.}}$$